TD Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

WPM **Exercice 1** Les ensembles suivants sont-ils naturellement des espaces vectoriels ? Si non, justifier brièvement.

1. L'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées.
2. L'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ majorées.
3. L'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones.
4. L'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui s'annulent.
5. L'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziennes.
6. L'ensemble des suites réelles périodiques.
7. L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

B9H **Exercice 2** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $ty'' + t^2y' + t^3y = 0$ forme un espace vectoriel.

I64 **Exercice 3** Soient F, H, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F \cap G) + (H \cap G) \subset (F + H) \cap G$. Justifier que l'inclusion peut être stricte.

I9S **Exercice 4**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Expliciter $\mathcal{C}(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4SZ **Exercice 5** Montrer que la réunion $F \cup G$ de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

9X7 **Exercice 6** Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note A l'ensemble des fonctions qui s'annulent au moins une fois. Montrer que $\operatorname{Vect} A = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Y69 **Exercice 7** ★ ♣

1. Montrer qu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ne peut pas s'écrire comme réunion finie de sous-espaces stricts.
2. Donner un exemple d'un espace vectoriel réunion finie de sous-espaces stricts.

Familles de vecteurs

PPB **Exercice 8** Déterminer une base de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.

WF8 **Exercice 9** Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille est libre.
2. Montrer qu'elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

H00 **Exercice 10** Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par multiplication. Montrer que $\operatorname{Vect} \mathcal{A}$ est stable par multiplication.

H1K **Exercice 11** Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f_n = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, f_n)$ est une base de E.

BG8 **Exercice 12** Soit $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_i = i$.

1. Justifier (brièvement) que $\mathcal{F}$ est libre.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

IZE **Exercice 13** Soient $F_0, F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère $x_i \in F_i \setminus F_{i-1}$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

05F **Exercice 14** ★ Soit $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ des réels distincts. Montrer que la famille suivante est libre :

1. $(f_j\colon x \mapsto e^{\alpha_j x})_j$
2. $(f_j\colon x \mapsto |x - \alpha_j|)_j$
3. $(f_j\colon x \mapsto e^{i\alpha_j x})_j$

Applications linéaires

AB0 **Exercice 15** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $\alpha\colon X \in \mathbb{R}^2 \mapsto AX$. Déterminer $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} \alpha$ et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} \alpha$.

7HW **Exercice 16** Soient u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Comparer $\ker(v \circ u)$ et $\ker u$. Comparer $\operatorname{Im}(v \circ u)$ et $\operatorname{Im} v$.
2. Donner une CNS sur les noyaux et les images de u, v pour que $v \circ u = 0$.
3. Montrer que $\ker v \oplus \operatorname{Im} u$ si et seulement si $\ker(v \circ u) = \ker u$.
4. On suppose que $\ker v + \operatorname{Im} u = E$. Montrer que $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

0RZ **Exercice 17** Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On suppose que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

1. ♡ Soient u, v des endomorphismes de E commutant, c'est-à-dire $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\ker v$ sont stables par u, c'est-à-dire que $u(\operatorname{Im} v) \subset \operatorname{Im} v$ et $u(\ker v) \subset \ker v$.
2. ★ On supose que u commute avec tout endomorphisme de E. Montrer que pour tout $x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Vect}(x)$.
   Indication : *Chercher à appliquer la question précédente.*
3. En déduire que u est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \operatorname{Id}_E$.
   Indication : *Pour tout $x \neq \vec{0}$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.*

MB6 **Exercice 18** ♣ Forme géométrique du théorème du rang Soit $u\colon E \to F$ une application linéaire. On considère un supplémentaire S de $\ker u$ dans E. Montrer que l'application linéaire $v\colon S \to \operatorname{Im} u \quad x \mapsto u(x)$ est bien définie et bijective.

PL9 **Exercice 19** ★ Lemmes de factorisation Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que tout sous-espace vectoriel de E admet des espaces supplémentaires.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = h \circ f$.
   Indication : *Considérer un supplémentaire F du noyau de f. Alors f réalise une bijection de F sur* $\operatorname{Im} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{L}(E),\ g = f \circ h$.

… sur $\mathbb{K}[X]$

EQB **Exercice 20** Montrer que $u\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \quad P \mapsto P(X+1)$ est un automorphisme.

AA4 **Exercice 21** Déterminer l'image de $u\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \quad P \mapsto P - P(0)$.

O9H **Exercice 22** Soit $u\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \quad P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer le noyau de u.
2. Pour $n = 2$, déterminer $u(1), u(X), u(X^2)$, puis $\operatorname{Im} u$.
3. Cas général ?

7ZE **Exercice 23**

1. Montrer que $u\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \quad P \mapsto P + P'$ est injective.
2. Justifier que u induit un endomorphisme u_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. En écrivant u et u_n comme sommes de deux endomorphismes simples.
   a) Donner, pour $k \in \mathbb{N}$, une expression de u^k.
   b) Justifier que u_n est un isomorphisme et donner une expression de u_n^{-1}.
   c) Justifier que u est un isomorphisme.

NY1 **Exercice 24** ★ Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec la dérivation. **Ind** : *Considérer* $u(X^n)$.

… sur d'autres espaces vectoriels

D64 **Exercice 25** On considère $\Phi\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\Phi\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Justifier que Φ est linéaire.
2. Donner sans justifier $\operatorname{Ker} \Phi$.
3. Montrer que Φ est surjective.

PJ5 **Exercice 26** [Banque CCP MP] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ définie par $f\colon M \mapsto AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
3. A-t-on $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

1JH **Exercice 27** ★ [Oral X] Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi_{A,B}\colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Soit $T = \{\varphi_{A,B},\ (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.

1. L'ensemble T est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Montrer que T contient une famille libre de cardinal n^4. *On en déduit que* $\operatorname{Vect} T = \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$.

Sommes directes et supplémentaires

Q5F **Exercice 28** Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$.

1. Donner des familles génératrices de F et G.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.
3. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

XVC **Exercice 29** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On considère G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Montrer que $F \oplus G' = F + G$.

HPM **Exercice 30** On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a, b deux réels distincts. On considère F le sous-espace vectoriel de E des fonctions affines et G le sous-espace vectoriel des fonctions continues qui s'annulent en a et en b. Montrer que $F \oplus G = E$.

4L9 **Exercice 31** Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires et $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires.

1. Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont des sevs.
2. Montrer qu'ils sont supplémentaires.
3. Quelle est la décomposition de $\exp$ dans $\mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$?

Projections

BYP **Exercice 32** Soit $p\colon (x, y, z) \mapsto (x, y, x + y)$ et $s\colon (x, y, z) \mapsto (-y, -x, z)$.

1. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et que s est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une description géométrique de p : p est la projection sur … parallèlement à …
3. Donner une description géométrique de s.

UEJ **Exercice 33** Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent.

1. Montrer que $p \circ q$ est une projection.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

MTO **Exercice 34** Soit E un espace vectoriel, et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que si $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Donner une CNS pour que $p + q$ soit un projecteur. Préciser dans ce cas l'image et le noyau de $p + q$.